VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 2

Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor

Vježbe iz Matematike 1.

2. Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor

Riješeni zadaci

Zadatak 1 Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice BC, a G polovište stranice CD. Izračunajte vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Rješenje: Očito vrijedi:
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$
Dalje, računamo preostala tri vektora:
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

Zadatak 2 Neka je dana dužina AB i točka C na pravcu kroz A i B, te proizvoljna toèka O. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2|\overline{BC}|$ i:

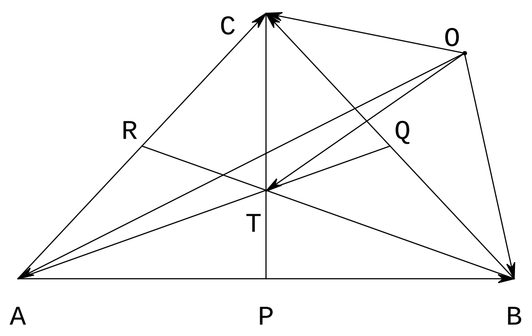
(a) $C \in \overline{AB}$

(b) $C \notin \overline{AB}$.

Rješenje: Uputa: napišite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$, gdje je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Koristeći $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ iz te jednakosti izrazite $\overrightarrow{AC}$.

Zadatak 3 Neka je T težište trokuta ABC, a O prozvoljna toèka. Izrazite vektor $\overrightarrow{OT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

Rješenje:
Sa slike očito slijedi:
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$
Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) = \vec{0}$, tj.
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (*)$.



Slika 1: Težište trokuta

Želimo pokazati da je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$. U tu svrhu računamo $\overrightarrow{TA}$, a pritom koristimo činjenicu da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ (računajući od vrha):

$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Analogno se dobiva

$\overrightarrow{TB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ i

$\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Zbrajanjem ove tri jednakosti daju $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, što uvrštanjem u jednakost $(*)$ daje

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Zadatak 4 Neka su A, B, C, D bilo koje četiri točke prostora. Ako su točke K, L, M, N redom polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, dokažite da je tada $KLMN$ paralelogram.

Rješenje: Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Očito je

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

S druge strane je

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d},$$

odakle dobivamo

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{0},$$

tj. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, dakle $KLMN$ je paralelogram.

Zadatak 5 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite koordinate točke D.

Rješenje:

U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x, y, z)$, imamo

$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = (4+2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$

$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah rješenje: $D = (0, 2, 2)$.

Zadatak se može riješiti i u matričnom zapisu - iz jednakosti $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

odakle očitavamo da je $D(0, 2, 2)$.

Zadatak 6 Napišite završnu točku vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, ako je početna točka tog vektora dana s $(1, 2, -2)$.

Rješenje: Označimo koordinate završne točke vektora $\vec{a}$ (x, y, z) i koristimo formulu za vektor zadan koordinatama početne i završne točke:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{a},$$

pa dobivamo

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, 5, -6)$.

Zadatak 7 Napišite završnu točku vektora kojem je početna točka $(1, 1, 1)$, a dva puta je dulji od vektora s početnom točkom $(-1, 2, 3)$ i završnom točkom $(0, 1, -2)$.

Rješenje: Označimo prvi vektor s $\vec{a}$, drugi vektor s $\vec{b}$, a početnu točku vektora $\vec{a}$ s (x, y, z). Iz $\vec{a} = 2\vec{b}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{-1} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ \text{-5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \text{-2} \\ \text{-10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \text{-1} \\ \text{-9} \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, -1, -9)$.

Zadatak 8 Nađite točku B orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ takve da je $A(1, 2, 3)$, a $P(2, 3, 7)$ je polovište dužine $\overline{AB}$.

Rješenje: Kako je P polovište dužine $\overline{AB}$, to je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$. Ako označimo $B(x, y, z)$ mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

dakle završna točka glasi $B(3, 4, 11)$.

Napomena:

Gornji zadatak nam daje ideju da izvedemo formulu za koordinate polovišta P dužine $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Označimo najprije $P(x, y, z)$. Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{T_1T_2}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix})$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je **polovište dužine** $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_1, y_2, z_2)$ dano s

$$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

Slično se može izvesti formula za koordinate težišta trokuta $T_1T_2T_3$ zadanog s $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ - **težište trokuta** $T_1T_2T_3$ dano je s

$$T(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}).$$

Zadatak 9

a) Provjerite koja dva od vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ su kolinearni.

b) Nađite realne brojeve x i y tako da vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje:

a) Po kriteriju za kolinearnost lako dobivamo da za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{-1},$$

što znači da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Isto se tako vidi da $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinearni. No, za $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imamo

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6},$$

pa su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ kolinearni.

b) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{x} = \frac{-1}{y},$$

što je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Lako dobivamo da je $x = -6$ i $y = 3$.

Zadatak 10 Prikažite vektor $\vec{c} = -4\vec{j} - 3\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rješenje: Prikazati $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znači naći koeficijente α i β tako da vrijedi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Vidimo da dobivamo sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= -4 \\ \beta &= -3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\beta = -3$ u prvu jednadžbu dobivamo da je $3\alpha = 3$, tj. $\alpha = 1$. Uvrštavanjem $\beta = -3$ i $\alpha = 1$ provjeravamo da je rješenje dobro. Dakle dobili smo sljedeći prikaz $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}.$$

Napomena: Primijetimo da u prethodnom zadatku rješenje koje smo dobili iz prve i treće jednadžbe nije moralo zadovoljavati i drugu jednadžbu. Da se to dogodilo zaključili bismo da $\vec{c}$ nije moguće prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To općenito i jest tako: da bismo prikazali svaki vektor prostora kao linearnu kombinaciju vektora, potrebna su nam najmanje **tri** vektora (mi općenito uzimamo koordinatne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$).

Zadatak 11 Prikažite vektor $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ pomoću vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Rješenje: Tražimo koeficijente α, β i γ tako da vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Imamo sada

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma \end{bmatrix}.$$

Dobivamo sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 2 \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma &= 3 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3. \end{aligned}$$

Jedinstveno rješenje je dano s $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, tako da je

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}.$$

Zadaci za samostalno rješavanje

Zadatak 12 Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice BC, a G polovište stranice CD. Izrazite vektore $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AE}$.

Rješenje:
$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BC} = -1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{FD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

Zadatak 13 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(1, 2, 3)$, $C(0, -1, 2)$ i $D(2, -1, 5)$. Odredite koordinate vrha B.

Rješenje: $B = (-1, 2, 0)$

Zadatak 14 Napišite vektor $\vec{a}$ koji je dvostruko kraći od vektora s početnom točkom $(2, -1, -4)$ i završnom točkom $(4, -1, 2)$.

Rješenje: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$

Zadatak 15 Nađite završnu točku vektora $\vec{u}$ kojem je početna točka $(2, -1, -1)$, te vrijedi $\vec{u} = -3\vec{v}$, gdje je $\vec{v}$ vektor s početnom točkom $(2, 0, -3)$ i završnom točkom $(-1, -1, 2)$.

Rješenje: $(11, 2, -16)$

Zadatak 16 Nađite realne brojeve x i y takve da vektori $2x\vec{i}+y\vec{j}-\vec{k}$ i $4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ budu kolinearni.

Rješenje: $x = -1$, $y = \frac{3}{2}$

Zadatak 17 Napišite vektor $\vec{d} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$.

Rješenje: $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

Zadatak 18 Pokažite da se vektor $\vec{c} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ ne može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rješenje: Ssustav koji proizlazi iz $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ nema rješenja.